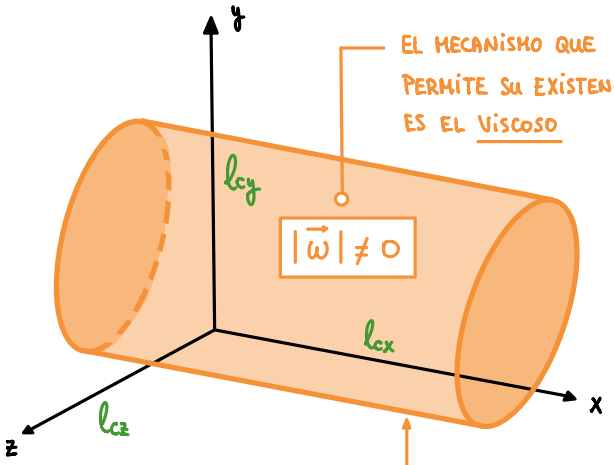
Flujo Esbelto Laminar de Cortadura Libre



EL MECANISMO QUE PERMITE SU EXISTENCIA ES EL VISCOSO

Dirección privilegiada del flujo "x" : $l_{cx} \sim l$

$l_{cy}, l_{cz} \sim \delta \ll l$

Velocidad en x : $\begin{cases} u_c \\ \Delta u_c \end{cases}$ $(\Delta u_c \lesssim u_c)$

Velocidad en y, z : $\begin{cases} v_c, w_c \\ \Delta v_c, \Delta w_c \end{cases}$ $(\Delta v_c, \Delta w_c \sim v_c)$ → Usamos esta por ejemplo para órdenes de magnitud.

En algún punto la velocidad transversal es prácticamente nula.

$|\vec{\omega}| \sim \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ VORTICIDAD DOMINADA POR LAS DERIVADAS TRANSVERSALES DE LA VELOCIDAD EN "x".

- CORTADURA $\rightleftharpoons$ $|\vec{\omega}| \neq 0$ $\boxed{\text{EN UNA REGIÓN DE TAMAÑO } O(\delta).}$
- LIBRE : no hay interacción entre paredes.

$|y^2 + z^2| \gg \delta^2 : |\vec{\omega}| \longrightarrow 0$ Flujo irrotacional al alejarnos mucho

Es un flujo CASI-UNIDIRECCIONAL $\xrightarrow[\text{3D}]{\text{CONTINUIDAD}}$ $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim \frac{\Delta u_c}{l}} + \frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\sim \frac{v_c}{\delta}} = 0 \longrightarrow \frac{v_c}{\Delta u_c} \sim \frac{\delta}{l} \ll 1$ (ESBELTO)

Y sabemos que : $\frac{\Delta u_c}{u_c} \lesssim 1$

$\longrightarrow$ $\boxed{\frac{v_c}{u_c} \lesssim \frac{\delta}{l} \ll 1}$

Como ejemplos de flujos esbeltos están chorros, estelas, capa límite, capas de mezcla...

En la región $y, z \sim \delta$, $|\vec{\omega}| \neq 0$:

$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \sim \frac{\boxed{v_c}}{\delta}$ Sin "Δ" porque v y w son parecidas

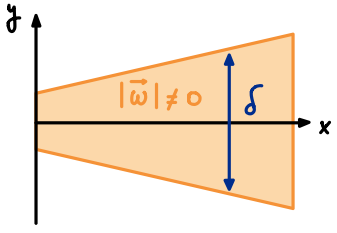
$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \sim \frac{\boxed{\Delta u_c}}{\delta}$ Con "Δ" porque u y w NO son parecidas

$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\boxed{\Delta u_c}}{\delta}$ Con "Δ" porque u y w NO son parecidas

$\omega_y, \omega_z \sim \frac{\Delta u_c}{\delta}$; $\frac{\omega_x}{\text{máx}(\omega_y, \omega_z)} \sim \frac{v_c}{\Delta u_c} \sim \frac{\delta}{l} \ll 1$

$\xrightarrow[\text{al ser } v_c \ll \Delta u_c]{\text{Se puede despreciar } \omega_x}$ $\boxed{\vec{\omega} \approx \frac{\partial u}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{k}}$

TÉRMINO DOMINANTE DE LOS DOS TÉRMINOS VISCOSOS. SE ENCARGA DE DIFUNDIR LA VORTICIDAD



ECdM$_x$ con $\vec{f_m} = -\nabla U_m$:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\sim \frac{\Delta u_c}{t}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\sim u_c \frac{\Delta u_c}{l}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + U_m\right)}_{\sim \frac{\Delta x\left(\frac{p}{\rho} + U_m\right)}{l}} + \underbrace{\cancel{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{\sim \nu \frac{\Delta u_c}{l^2}} + \underbrace{\boxed{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}_{\sim \nu \frac{\Delta u_c}{\delta^2}}$$

$\sim \nu \frac{\Delta u_c}{l^2} \ll \sim \nu \frac{\Delta u_c}{\delta^2}$

$S_t = \frac{l_c}{u_c t_c}$ $\boxed{S_t \lesssim 1}$

En $y \sim \delta$: $u_c \frac{\Delta u_c}{l} \sim \nu \frac{\Delta u_c}{\delta^2} \longrightarrow \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \sim \frac{\nu}{u_c l} \sim Re^{-1} \longrightarrow \boxed{\frac{\delta}{l} \sim Re^{-1/2}}$

Y como $\frac{\delta}{l} \ll 1$

$\longrightarrow$ $\boxed{Re \gg 1}$ IMPLICACIÓN DE FLUJO ESBELTO

Igualando los órdenes de magnitud de los términos CONVECTIVO y DE PRESIONES de la ECdM$_x$:

$$u_c \frac{\Delta u_c}{\ell} \sim \frac{\Delta_x\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}{\ell} \longrightarrow \Delta_x\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) \sim u_c\,\Delta u_c$$

De la ecuación de continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \longrightarrow \frac{v_c}{\Delta u_c}\sim\frac{\delta}{\ell}\ll 1 \longrightarrow \frac{v_c}{u_c}\overset{\Delta u_c \lesssim u_c}{\lesssim}\frac{v_c}{\Delta u_c}\sim\frac{\delta}{\ell}\ll 1$ (*)

ECdM$_y$ (en la dirección transversal):

Se incluye el término no estacionario teniendo ya en cuenta $St \lesssim 1$

$$\underbrace{\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}}+u\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial t}}_{\sim u_c\frac{v_c}{\ell}\ (St\lesssim 1)} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}_{\sim\frac{\Delta_y\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}{\delta}} + \underbrace{\cancel{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}}_{\sim\nu\frac{v_c}{\ell^2}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\sim\nu\frac{v_c}{\delta^2}}$$

$\left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2 \ll 1$

$$\longrightarrow \frac{u_c}{\ell}\sim\frac{v_c}{\delta} \longrightarrow \boxed{\frac{\delta}{\ell}\sim Re^{-1/2}\ll 1}$$

Igualando los órdenes de magnitud de los términos CONVECTIVO y DE PRESIONES de la ECdM$_y$:

$$\Delta_y\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)\sim u_c\frac{v_c}{\ell}\delta \overset{(*)}{\sim} \Delta u_c\frac{\delta}{\ell}\frac{v_c}{\ell}\delta \sim \Delta u_c\, v_c\left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_x\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)&\sim u_c\,\Delta u_c\\ \Delta_y\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)&\sim \Delta u_c\, v_c\left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2\end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\frac{\Delta_y\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}{\Delta_x\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}\sim\left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2\ll 1} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)\approx 0}$$

DE CARA A RESOLVER LA ECdM$_x$ PODEMOS ASUMIR

ESTO OCURRE POR SER MUY DÉBILES LAS VELOCIDADES TRANSVERSALES

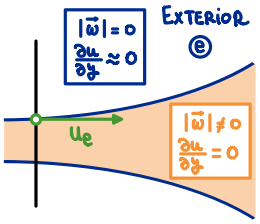
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)\approx 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)_e \longrightarrow \text{EXTERIOR}$$

De momento contamos con las siguientes ecuaciones para resolver el flujo:

Desaparece si $St \ll 1$ (casi estacionario)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0} \qquad \boxed{\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)_e+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)\approx 0}$$

CONTINUIDAD — ECdM$_x$ — ECdM$_y$



u_e: velocidad en la dirección privilegiada en la interfaz de la capa de cortadura y la zona irrotacional.

Región exterior: $\begin{cases}|\vec{\omega}|=\vec{0} & \text{IRROTACIONAL}\\ \vec{v}_e\approx u_e\,\vec{i} & \text{FLUJO DE EULER}\end{cases}$

Si recordamos, la ECdM puede expresarse también como:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\underbrace{\nabla\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)}_{\approx\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_e^2}{2}\right)}-\vec{v}\wedge\underbrace{\cancel{(\nabla\wedge\vec{v})}}_{\vec{\omega}=\vec{0}}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\underbrace{\vec{f}_m}_{\nabla U_m}+\cancel{\nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}_\mu}$$

$\vec{0}$ (Irrotacional) $\qquad$ $\vec{0}$ (EULER)

$\frac{\partial u_e}{\partial t}$ (En el caso cuasi-estacionario $=\vec{0}$)

Por tanto :

$$\boxed{-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)_e \approx \boxed{\frac{\partial u_e}{\partial t}} + u_e\frac{du_e}{dx}}$$

DATO PREVIO, OBTENIDO DE RESOLVER FLUJO DE EULER (EXTERIOR) PREVIAMENTE

Así pues, las ecuaciones quedan :

Desaparecen si $St \ll 1$ (casi estacionario)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0}$$

CONTINUIDAD

$$\boxed{\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\boxed{\frac{\partial u_e}{\partial t}}+u_e\frac{du_e}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

$ECdM_x$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)\approx 0}$$

$ECdM_y$